Historia Mathematica 10 (1983) 318-343

VON RIEMANN ZU LEBESGUE--ZUR ENTWICKLUNG DER INTEGRATIONSTHEORIE*

BY EBERHARD KNOBLOCH
FACHBEREICH MATHEMATIK,
TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN,
1000 BERLIN 12, FEDERAL REPUBLIC OF GERMANY

SUMMARIES

This paper analyzes certain phases of the development of modern integration theory by emphasizing the motivation of mathematicians for their work and their own estimations of their proceedings. The following seven points are discussed: 1. Introductory sketch of the history to be covered; 2. Cauchy and Dirichlet paving the way for Riemann; 3. Riemann; 4. Darboux and Hankel continuing the work of Riemann; 5. Evaluation of Hankel and Riemann; 6. Borel's measure theory; 7. Lebesgue's idea of the integral.

Dans cet article, nous analysons quelques étapes de l'évolution de la théorie de l'intégration en focalisant notre attention sur la motivation des mathématiciens et leur propre évaluation de leur procédé. Nous procéderons en sept temps: 1. Esquisse d'introduction à l'histoire de notre sujet; 2. Cauchy et Dirichlet ouvrant la voie à Riemann; 3. Riemann; 4. Darboux et Hankel poursuivent l'oeuvre de Riemann; 5. Evaluation de l'oeuvre de Hankel et Riemann; 6. La théorie de la mesure de Borel; 7. Le concept d'intégrale chez Lebesgue.

EINFÜHRUNG

Eine Reihe bedeutender Mathematiker hat sich mittelbar [Bernhard Riemann 1854/1868] oder unmittelbar [Henri Lebesgue 1904, 1926b; Friedrich Riesz 1949; Ivan Pesin 1966; Thomas Hawkins 1970, 1980; Antonie Frans Monna 1972] mit der Entwicklung der neueren Integrationstheorie beschäftigt, also insbesondere solcher, die selbst entscheidende Beiträge zu ihrer heutigen Ausgestaltung geliefert haben [1]. Ein großer Teil von Riemanns Habilitationsschrift, "Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe," ist der Geschichte dieser Reihen gewidmet, die für die Integrationstheorie von großer

*Herrn Prof. Dr. Kurt Vogel zum 95. Geburtstag gewidmet.

0315-0860/83 $3.00

Bedeutung waren. Lebesgue beginnt seine berühmten *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* mit dem Integral vor Riemann, das heißt mit der Epoche von Leibniz und Newton, und folgt dem historischen Aufbau der Theorie bis zu seinem eigenen Integralbegriff. Wie sehr er an mathematikhistorischen Fragen interessiert war, belegt die Tatsache, daß seine Biographin und Schülerin Lucienne Félix dem "Historiker" Lebesgue einen eigenen Abschnitt in ihrer Würdigung *Message d'un mathématicien: Henri Lebesgue* eingeräumt hat [Félix 1974]. Zudem ist die Geschichte der Integrationstheorie im Anschluß an die wissenschaftstheoretischen Thesen von Imre Lakatos herangezogen worden [Hallett 1979; Spalt 1981].

Zwar soll dankbar anerkannt werden, daß vor allem Hawkins' Buch überaus anregend geschrieben ist. Dennoch scheinen mir von Mathematikern wie Philosophen historische Details, insbesondere der Wortlaut der Quellentexte nicht immer ausreichend berücksichtigt worden zu sein, abgesehen von fehlerhaften Angaben [2]. In den folgenden sieben Abschnitten soll daher versucht werden, an Hand der Originaltexte die Motivation der betroffenen Mathematiker zu ihren Arbeiten und die Selbsteinschätzung ihres Vorgehens herauszustellen, um wesentliche Epochen der Geschichte der neueren Integrationstheorie zu untersuchen.

1. SYSTEMATISCHE CHARAKTERISIERUNG DER ENTWICKLUNG

Der von dem Pfarrerssohn und Gaußschüler Riemann (1826-1866) eingeführte Integralbegriff hat auch heute weder seine Berechtigung noch seine Bedeutung verloren. Riemanns Integrationstheorie bildet, um in der Terminologie von Lakatos zu sprechen, kein degenerierendes Programm gegenüber Lebesgues Integrationstheorie. Er erwies sich jedoch in mehrfacher Hinsicht als unzureichend:

1. Er gestattete keine einheitliche Behandlung bestimmter Operationen in der klassischen Analysis: Wann ist die trigonometrische Reihe, die eine Funktion darstellt, deren Fourierreihe? Wann ist die gliedweise Integration einer unendlichen Reihe gestattet?

2. Die Anwendung in anderen mathematischen Gebieten, wie der modernen Wahrscheinlichkeitsrechnung war unbefriedigend.

3. Zahlreiche Merkwürdigkeiten wurden in der Theorie der reellen Funktionen in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts durch ein Forschungsprogramm aufgedeckt, das wie in der menschlichen Pathologie möglichst viele Ausnahmeerscheinungen entdecken wollte, um die Gesetze zu bestimmen, denen sie entsprechend klassifiziert werden können:

3.1. Stetige, nicht differenzierbare Funktionen;
3.2. Unstetige Summen von Reihen stetiget Funktionen;
3.3. Stetige Funktionen, die nicht stückweise monoton sind;

3.4. Nichtintegrierbare Ableitungen;
3.5. Rektifizierbare Kurven, auf die die klassische Integralformel nicht anwendbar ist;
3.6. Nichtintegrierbare Funktionen, die der Limes von Folgen integrierbarer Funktionen sind;
3.7. Gegenbeispiele und Schwierigkeiten mit dem Fubinischen Satz über die Berechnung von Doppelintegralen durch iterierte Integrale [Kline 1972, 1040].

Diese Ergebnisse wurden aus einer kritischen Haltung gegenüber dem Denken früherer Mathematiker gewonnen, ohne daß sie ohne weiteres zu einer Kritik an Riemanns Integraldefinition führten. Die Existenz von Ausnahmen wurde akzeptiert und teilweise erwartet. Riemanns Definition galt, wie Karl Weierstraß (1815-1897) im Mai 1885 schrieb, für "die allgemeinst denkbare" [Mittag-Leffler 1923a, 196]. Er selbst war der erste Kritiker, äußerte jedoch seine Kritik nur brieflich, zum Beispiel gegenüber dem Analytiker Paul du Bois-Reymond (1831-1889) oder in Vorlesungen [Mittag-Leffler 1923b, 214-219, 225]. Seine eigenen Versuche, die Riemannsche Definition zu erweitern, blieben erfolglos. Indessen wuchs das Bedürfnis, durch eine modifizierte Integraldefinition wenigstens einige der genannten Probleme zu lösen.

Dies gelang 1901/2 Henri Lebesgue (1875-1941) mit Hilfe von Camille Jordans (1838-1922) Inhaltstheorie und Emile Borels (1871-1956) Maßtheorie. Diese Entwicklung vollzog sich jedoch keineswegs geradlinig. Lebesgues Theorie setzte sich nicht ohne Widerstände von anderer Seite durch. Ja, Lebesgue bezweifelte selbst zunächst den praktischen Wert seiner Arbeit [Lebesgue 1922, 13 f.]. So hatte sich Charles Hermite (1822-1901) gegen eine der ersten Veröffentlichungen Lebesgues gewandt, da er eine tiefe Abneigung gegen solch pathologische Funktionen hatte, wie sie Lebesgue betrachtete. Bereits am 20.5.1893 schrieb er an Thomas Jean Stieltjes (1856-1894): "Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées..." [Hermite 1905, Bd.2, 318].

Lebesgue berichtet, daß er in mathematischen Gesprächszirkeln zum einseitigen Vertreter solcher Funktionen gestempelt wurde und von Analytikern eingewandt wurde: "Dies wird Sie nicht interessieren. Wir sprechen über stetige Funktionen, die ableitbar sind" [Lebesgue 1922, 13 f.]. Dem entspricht die Bemerkung Jordans, die er nach der Lektüre von Lebesgues Dissertation "Intégrale, longueur, aire" aus dem Jahre 1902 Lebesgue gegenüber machte: "Persévérez dans la recherche scientifique, vous y éprouverez de grandes joies. Mais il vous faudra apprendre à les goûter solitairement. Vous serez pour les vôtres un sujet d'étonnement. Vous ne serez guère mieux compris du monde savant; les mathématiciens y ont une place à part et ils ne se lisent même pas toujours les uns les autres" [Lebesgue 1926a, LI]. Die letzte Bemerkung wandte sich gegen Hermite, dem Jordans Arbeiten zu schwierig und zu abstrakt waren.

Seine eigene Ansicht sprach Lebesgue unter anderem in der historischen Skizze zur Entwicklung des Integralbegriffs aus dem Jahre 1926 aus: Eine Verallgemeinerung ist in der Mathematik nicht aus eitler Freude am Verallgemeinern vorzunehmen, sondern um vorher existierende Probleme in fruchtbarer Verallgemeinerung zu lösen [Lebesgue 1926b, 74]. Lebesgues Integrationstheorie sollte also Probleme lösen, für deren Lösung sie geschaffen wurde. Das von Hallett im Anschluß an David Hilbert (1862-1943) angeführte Kriterium für den Erfolg oder Mißerfolg von Programmen, nämlich mathematische Probleme zu lösen, für deren Lösung sie nicht geschaffen wurden, trifft auf Lebesgue expressis verbis nicht zu [Hallett 1979, 7].

2. CAUCHY UND DIRICHLET ALS WEGBEREITER VON RIEMANN

Die Entwicklung war durch zwei Charakteristika bestimmt: (1) Durch eine Präzisierung falscher Vorstellungen von analytischen Eigenschaften, (2) durch eine Vermengung von topologischen mit maßtheoretischen Eigenschaften. Zum besseren Verständnis von Riemann ist jedoch zunächst ein kurzer Blick auf die Zeit vor dessen Habilitationsschrift zu werfen. Riemanns Integrationstheorie baute auf Cauchys auf, indem sie die Voraussetzungen über die integrierten Funktionen möglichst schwach hielt: Riemann ersetzte die Stetigkeitsforderung Cauchys durch die schwächere, daß Cauchysummen gegen einen eindeutigen Grenzwert konvergieren.

Da Cauchy von vornherein stetige Funktionen zugrunde legte [Cauchy 1823; II,4,122], war bei ihm die Untersuchung unbestimmter Integrale mit derjenigen primitiver Funktionen identisch, ein "résultat bien connu," wie Lebesgue 1902 hervorhob [Lebesgue 1902, 262]. So hielt es Cauchy ausdrücklich für nötig, allgemein die Existenz von Integralen oder primitiven Funktionen (wie er sagte) zu beweisen, bevor er ihre Eigenschaften "bekanntmachte" [Cauchy 1823; II,4,10].

Nun ist die Geschichte der Integrationstheorie nach Cauchy wesentlich eine Geschichte der Versuche, den Integralbegriff auf möglichst viele unstetige Funktionen auszudehnen. Dazu mußten unstetige Funktionen erkannt und ernst genommen werden [Hawkins 1970, 3]. Das Problem aber, unstetige Funktionen zu integrieren, wurde erst mit dem modernen, von Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) eingeführten Funktionsbegriff offensichtlich, worauf zum Beispiel René-Louis Baire (1874-1932) 1899 in seiner Dissertation ausdrücklich Bezug nahm [Baire 1899, 1]. Die Auffassung, eine Funktion sei eine Korrespondenz, eine eindeutige Zuordnung, legte Dirichlet 1829 explizit seiner Abhandlung über die Konvergenz trigonometrischer Reihen, die zur Darstellung einer beliebigen Funktion zwischen zwei gegebenen Grenzen dienen, zugrunde [3]. Er kritisierte zunächst einen fehlerhaften Beweis Cauchys zur Konvergenz von Fourierreihen aus dem Jahre 1823, der aber erst 1826 veröffentlicht wurde. Sodann bewies er streng die Konvergenz der periodischen Reihen, die "beliebige Funktionen zwischen gegebenen Limites ausdrücken." "Beliebig" wird von ihm jedoch durch zwei, die einzigen, wie er sagt, Bedingungen eingeschränkt:

1. Das betreffende $\phi(x)$ darf nicht unendlich werden.
2. Wenn a,b beliebig zwischen $-\pi$ und π liegen, so kann man stets zwischen a,b andere Größen r,s hinreichend benachbart setzen, für die die Funktion im Intervall von r bis s stetig bleibt.

Wir würden sagen:

1. ϕ muß beschränkt sein.
2. Die Menge der Unstetigkeitspunkte in $[-\pi,\pi]$ darf nirgends dicht sein.

In Wahrheit ist die zweite Bedingung weder notwendig noch hinreichend, eine Erkenntnis, die schrittweise gewonnen werden mußte. Dirichlet gab ein Gegenbeispiel, das bis heute berühmt geblieben ist:

$$f(x) = \begin{cases} c, & \text{wenn } x \text{ rational,} \\ d, & \text{wenn } x \text{ irrational,} \end{cases} \qquad c \neq d, \ c,d \in \mathbb{R}.$$

Im Falle dieser Funktion verliert eine Integration jede Bedeutung, wie er sagte, und er fügte hinzu: "Aber diese Sache verdient größere Klarheit und verlangt Details, die mit den Grundprinzipien der Infinitesimalrechnung verbunden sind, die in einer anderen Note dargelegt werden werden" [Dirichlet 1829, 169].

Dieses Versprechen hat Dirichlet nie eingelöst, über seinen angestrebten Integralbegriff konnte Weierstraß nur spekulieren. Wohl aber begann mit ihm die Unterscheidung zwischen der Klasse der stetigen und der integrierbaren Funktionen. Er stand seinem Nachfolger Riemann ratgebend zur Seite, als sich dieser in seiner Habilitationsschrift erneut diesen Fragen zuwandte. Seine Bemerkung führte jedoch dazu, "nirgendwo dicht" mit "zu vernachlässigen für die Integrationstheorie" gleichzusetzen, eine Tendenz, die die Einführung maßtheoretischer Gesichtspunkte in diese Theorie verzögerte [Hawkins 1970, 15 f.]. Die Notwendigkeit seiner zweiten Bedingung wurde freilich bereits von Riemann angezweifelt und widerlegt.

3. RIEMANN

Riemann knüpfte 1854 mit der Schrift "Über die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe" unmittelbar an Dirichlets Aufsatz an. Sein Ziel war es, die von Dirichlet unerledigt gelassene Frage zu klären, ob und wann eine Funktion f durch eine trigonometrische Reihe darstellbar ist, die die beiden folgenden Bedingungen nicht erfüllt:

1. f ist durchgehend integrierbar.
2. f hat nicht unendlich viele Maxima und Minima.

Da er auf diese Weise auf bis dahin völlig ungewohnte Funktionen geführt wurde, glaubte er, sein Tun rechtfertigen zu müssen, ähnlich wie es später Lebesgue tat [Lebesgue 1902, 231, 282]: Zwar könne man sicher sein, daß die Funktionen, auf die sich die Dirichletsche Untersuchung nicht erstreckt, in der Natur nicht vorkommen. (Dementsprechend stellen heute Autoren zur Lebesgueschen Integrationstheorie, wie die Polen Hartmann und Mikusinski, fest, in der Praxis laufe man keine Gefahr, auf nichtmeßbare Mengen zu stoßen [4].) Dennoch verdienten die von Dirichlet unerledigten Fälle aus zwei Gründen Beachtung:

1. Der Gegenstand steht mit den Prinzipien der Infinitesimalrechnung in engster Verbindung und kann helfen, diese Prinzipien besser zu klären und genauer zu bestimmen.

Riemanns Bemerkung nimmt also die Schlußworte Dirichlets auf.

2. Die Anwendbarkeit der Fourierschen Reihen ist nicht auf physikalische Untersuchungen beschränkt, sondern erstreckt sich auch auf Gebiete der reinen Mathematik, wie die Zahlentheorie.

Zur Klärung des Problems sah er sich gezwungen, einen Aufsatz über den Begriff des bestimmten Integrals und den Umfang seiner Gültigkeit vorauszuschicken. Seine erste Frage ist also:

1. Was bedeutet $\int_a^b f(x)\,dx$?

Ohne es explizit gesagt zu haben, setzt er die Beschränktheit von f voraus [5] und verlangt statt wie Cauchy die Stetigkeit von f nur die Konvergenz der Summen

$$S = \delta_1 f(a + \varepsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \varepsilon_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \varepsilon_n\delta_n),$$

$$a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < b,$$

gegen einen eindeutigen Grenzwert. Dabei sind die δ_i die Teilintervallängen, die ε_i sollen echte Brüche sein, eine unnötige Verschärfung gegenüber Cauchys Forderung, daß die betreffenden Koeffizienten, bei ihm ∂ genannt, zwischen 0 und 1 liegen sollen. Riemann sagt: Nähern sich die Werte von S für beliebige Werte von δ_i, ε_i unendlich einer festen Grenze A, wenn alle δ_i unendlich klein werden, so heißt dieser Wert $\int_a^b f(x)\,dx$. Anderenfalls ist dieser Ausdruck bedeutungslos.

Epsilontik oder lim-Schreibweise treten bei Riemann nicht auf. Diese Definition schien jahrzehntelang die äußerste Allgemeinheit zu verkörpern. Der Integralbegriff konnte auf Funktionen ausgedehnt werden, deren Unstetigkeitspunkte eine dichte Menge bilden, also auf Funktionen, deren Existenz von den meisten Mathematikern noch nicht einmal betrachtet worden war.

Seine zweite Frage lautet:

2. In welchen Fällen läßt eine Funktion eine Integration zu? Zur Beantwortung dieser Frage führt er den Begriff der "größten Schwankung D einer Funktion in einem Intervall" ein: es soll die Differenz zwischen deren größten und kleinsten Wert in dem betreffenden Intervall sein. Obwohl Riemann möglichst unstetige Funktionen berücksichtigen will, spricht er also nicht, wie erforderlich, von der Differenz zwischen oberer und unterer Grenze der Funktionswerte [6]. Diese Präzisierung nimmt erst Gaston Darboux (1842-1917) vor [Darboux 1875, 65]. Riemann gibt für die Integrierbarkeit ohne weitere Begründung die notwendige Bedingung an:

I_1: Mit den δ_i muß die Summe $D_1\delta_1 + D_2\delta_2 + \cdots + D_n\delta_n$ unendlich klein werden.

Dabei sind die D_i die Schwankungen der Funktion in den Teilintervallen. Er sagt nur beiläufig später, daß die Bedingung auch hinreichend ist. Mit Hilfe von I_1 stellt er das folgende notwendige und hinreichende Kriterium auf:

I_2: Sei f endlich. Die Summen S konvergieren, falls $\delta_i \to 0$, genau dann, wenn die Gesamtgröße der Intervalle, in denen die Schwankung der Funktion bei beliebig vorgegebenem σ größer als σ ist, durch geeignete Wahl von d (alle $\delta_i < d$) beliebig klein gemacht werden kann.

Er hat so, wie er feststellt, die Bedingung für die Möglichkeit eines bestimmten Integrals im allgemeinen untersucht, das heißt ohne besondere Voraussetzungen über die Natur der zu integrierenden Funktion. Dazu zählen auch Funktionen, die auf einer dichten Untermenge von R unstetig sind. Da diese Funktionen noch nirgends betrachtet worden seien, gebe er ein Beispiel. Es widerlegt zugleich die Notwendligkeit von Dirichlets zweiter Integrabilitätsbedingung fur Riemann-Integrale:

$$f(x) = \sum_{1,\infty} \frac{(nx)}{nn}.$$

Dabei gilt:

(x) ist der Überschuß von x über die nächste ganze Zahl bzw. 0, falls x zwischen zwei ganzen Zahlen in der Mitte liegt.

Diese sehr knappe Definition bedeutet ausführlicher:

$$(x) = \begin{cases} x - m(x), & \text{wobei } m(x) \text{ die ganze Zahl ist, durch die } |x - m(x)| \text{ zu einem Minimum wird, falls } x \neq n/2,\ n \text{ ungerade;} \\ 0, & \text{falls } x = n/2,\ n \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Aus heutiger Sicht lassen sich die Bedingungen I_1, I_2 im Sinne von Jordanmeßbarkeit und äußeren Inhalt umdeuten, Begriffe, die beide entscheidend zur Ausbildung der modernen Integrationstheorie beigetragen haben. Aber Riemann dachte nicht in diesen Begriffen. Maßtheoretische Ideen wurden erst geraume Zeit später eingeführt.

4. DARBOUX UND HANKEL ALS FORTSETZER VON RIEMANNS ARBEIT

Riemanns Ausführungen zogen einen großen Aufschwung der mathematischen Forschung nach sich, freilich erst nach deren verspäteter Veröffentlichung durch Richard Dedekind (1831-1916) im Jahre 1867. Aber es gab drei wichtige Problemkreise, über die Unklarheit und Verwirrung herrschte und deren Erforschung vorrangig betrieben wurde:

1. Trigonometrische Reihen und gliedweise Integration;
2. Die Betrachtung dreier bestimmter Typen von Punktmengen, die für die Integrationstheorie keine Rolle spielen sollten;
3. Differenzierbarkeitseigenschaften stetiger Funktionen.

Niels Henrik Abel (1802-1829) hatte zwar 1826 die Vertauschbarkeit von Grenzprozessen in Frage gestellt und Cauchy nachgewiesen, daß der Satz falsch ist: Eine in einem Punkt a konvergente Reihe stetiger Funktionen konvergiert gegen eine dort stetige Funktion. Es blieb jedoch Weierstraß vorbehalten, seit 1841 die Bedeutung des Unterschieds zwischen gleichmäßiger und ungleichmäßiger Konvergenz erkannt zu haben. Diese Erkenntnis blieb freilich vorwiegend auf seinen Schülerkreis beschränkt, bis Eduard Heine (1821-1881) 1870 in einer Arbeit über trigonometrische Reihen nachdrücklich darauf aufmerksam machte [7].

Darboux war es, der Riemanns Ideen in Frankreich hauptsächlich verbreitete. Unter Bezugnahme auf die Arbeiten von Heine und Georg Cantor (1845-1918) strich er 1875 die Bedeutung der gleichmäßigen Konvergenz in der Theorie der unendlichen Reihen und der Integrationstheorie heraus [Darboux 1875]. Unter anderem gab er das Beispiel einer konvergenten Reihe, die eine stetige Funktion f darstellt, während die Reihe der Integrale, die stets konvergiert, nicht das Integral von f darstellt [Darboux 1875, 84]:

$$-2xe^{-x^2} = \sum_{1}^{\infty} \left[-2n^2xe^{-n^2x^2} + 2(n+1)^2xe^{-(n+1)^2x^2}\right],$$

$$\int_0^x \left(-2te^{-t^2}\right) dt = e^{-x^2} - 1, \quad \text{aber } \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x u_n(t)dt = e^{-x^2}.$$

Die Reihe ist nicht gleichmäßig konvergent bzw. nicht gleichmäßig beschränkt auf $[0,x]$. Den zweiten Begriff führte Darboux nicht ein, er wußte offenbar nichts von seiner Bedeutung für die gliedweise Integration.

Seine "Abhandlung über unstetige Funktionen," wie er sie nannte, klassifizierte er selbst als ein Studium der Prinzipien, auf denen der Integralkalkül beruht. Er zeigte auf der Grundlage der Riemannschen Definition des bestimmten Integrals, daß diese Definition notwendig auf unendlich viele stetige Funktionen ohne Ableitung führen muß. Über seine Absichten sagte er zu Beginn der Arbeit, er sei immer darauf bedacht gewesen, streng [rigoreux] zu sein, ohne dies vielleicht erreicht zu haben, auch auf die Gefahr hin, zu lang zu sein.

Die Strenge war durch Riemanns Einführung einer völlig neuen Funktionsklasse notwendig geworden. "Denn," so sagte Darboux, "viele Punkte, die als richtig oder evident angesehen werden konnten, oder die bei der Anwendung der Wissenschaft auf gewöhnliche Funktionen zugestanden werden konnten, müssen einer strengen Prüfung unterzogen werden, wenn es um das Aufstellen von Sätzen geht, die sich auf allgemeinere Funktionen beziehen." Wir haben hier also methodische Strenge als zwingende Folge aus Sonderproblemen, scheinbar pathologischen Fällen. Es ist nicht umgekehrt, wie es etwa Lakatos am Beispiel der Beweisversuche zum Eulerschen Polyedersatz darstellt, daß der Ruf nach methodischer Strenge auf Sondererscheinungen pathologischer Art führt [Lakatos 1976].

Obwohl Hermann Hankels (1839-1873) Forschungen zeigten, daß die Integrabilität einer Funktion von der Natur bestimmter Punktmengen abhängt, wurden zwischen 1870 und 1880 keine maßtheoretischen Folgerungen aus I_2 gezogen. Erst Axel Harnack (1855-1888) und Vito Volterra (1860-1940) formulierten die Abhängigkeit der Integrierbarkeit von Unstetigkeitspunkten in einer Gestalt, die an den Inhalt von Punktmengen anknüpfte [Schoenflies 1899, 177]. Dies lag an der Verwirrung, die über drei Typen von Mengen herrschte:

1. Cantors Mengen 1. Gattung (oder vom endlichen Typ n) $E^{(n)} = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$;
2. Nirgends dichte Mengen;
3. Mengen, deren Punkte in Intervalle endlicher Länge eingeschlossen werden können, deren Summe beliebig verkleinert werden kann.

Während Harnack Mengen des ersten und dritten Typs identifizierte [Harnack 1880, 128], vermengte Hankel topologisch mit maßtheoretisch zu vernachlässigenden Mengen [Hankel 1870/1882]. Er unterschied 1870 zwischen "punktirt" und vollständig unstetigen Funktionen, eine Unterscheidung, die noch Baire 1899 nachvollzog [Baire 1899, 3, 28, 31]. Er definierte:

Punktirt unstetig heißen solche linear unstetigen Functionen, bei welchen die Punkte mit Sprüngen $> \sigma$

> *nur zerstreut vorkommen und keine Strecke erfüllen, wie klein auch die, von Null verschiedene, Größe* σ sei. [Hankel 1870/1882, 89]

Dabei versteht er unter "linear unstetigen" Funktionen solche, die in unendlich vielen Punkten einer endlichen Strecke unstetig sind, unter "zerstreut": zwischen je zwei beliebig nahen Streckenpunkten gibt es immer ein Intervall, in dem kein Punkt der Menge liegt.

Danach nennt Hankel also eine Funktion f punktirt unstetig, wenn die Mengen S_σ, die Mengen der Punkte x also, in denen f größere Sprünge als $\sigma > 0$ macht, nirgends dicht sind. Er glaubt, beweisen zu können: Die punktirt unstetigen Funktionen sind immer integrabel. Er schließt folgendermaßen: "Bei punktirt unstetigen Functionen kann stets die Summe der Intervalle, in denen Schwankungen größer als eine beliebig kleine Größe σ vorkommen, und daher auch der Beitrag, den diese Intervalle zum Integrale leisten, beliebig verkleinert werden" [Hankel 1870/1882, 92]. Seine Argumentation ist falsch, weil eine nirgends dichte Menge nicht den Inhalt Null haben muß. Die topologische Charakterisierung dieser Punktmengen verdunkelte ihre maßtheoretischen Eigenschaften. Hankel wie offenbar auch du Bois-Reymond [Bois-Reymond 1875, 22] hielten Dirichlets zweite Bedingung jedenfalls für hinreichend, da sie die Existenz einer nirgends dichten Menge mit positivem Inhalt nicht für möglich hielten.

5. KRITIK AN HANKEL UND RIEMANN

Ulisse Dini (1845-1918) lehnte 1878 den Beweis von Hankels Satz ab: "Wenn Hankel glaubte, auch umgekehrt beweisen zu können, daß jede zwischen α und β punktirt unstetige Function, in dem Intervall (α,β) stets der bestimmten Integration fähig ist, so glauben wir nicht, einen solchen Satz aufstellen zu können, weil der Beweis Hankel's uns durchaus nicht streng genug zu sein scheint" [Dini 1878, 250; 1892, 341]. Dini widerlegte also weder den Satz noch den Beweis, sondern übte nur globale Kritik. Es gelang ihm nicht, eine nirgends dichte Menge von positivem äußeren Inhalt, das heißt ein Gegenbeispiel zu konstruieren.

Darin hatte Volterra 1881 Erfolg [Volterra 1881a]. Sein Ergebnis deckte die Bedeutung maßtheoretischer Eigenschaften von Mengen in der Integrationstheorie auf und führte zur Etablierung der ersten Maßtheorie. Er unterteilte [0,1] in unendlich viele Intervalle durch die Folge α_n' in der folgenden Weise:

$$0 < \cdots < \alpha_2' < \alpha_1' < 1.$$

Dabei gilt:

(1) $\alpha_n' \to 0$,

(2) $1 - \alpha_1' = \frac{1}{2^{2\cdot 1}}(1 - 0)$,

(3) $\alpha_n' - \alpha_{n+1}' < 1 - \alpha_1'$,

(4) $(\alpha',1)$ wird nicht weiter unterteilt.

Die gleiche Prozedur wird auf alle (α_{n+1},α_n) angewendet, das heißt wenn

$$\alpha_{n+1}' < \cdots < \alpha_{n,m}'' < \cdots < \alpha_{n,2}'' < \alpha_{n,1}'' < \alpha_n'$$

so gelte:

(1) $\alpha_{n,m}'' \to \alpha_{n+1}'$,

(2) $\alpha_n' - \alpha_{n,1}'' = \frac{1}{2^{2\cdot 2}}(\alpha_n' - \alpha_{n+1}')$,

(3) $\alpha_{n,m}'' - \alpha_{n,m+1}'' < \alpha_n' - \alpha_{n,1}''$,

(4) $(\alpha_{n,1}'', \alpha_n')$ wird nicht weiter unterteilt.

Die gleiche Prozedur wird auf alle $(\alpha_{n,m+1}'', \alpha_{n,m}'')$ angewendet usf.

Sei G die Menge der Punkte der Unterteilung, das heißt der α's mit 0, 1, $\overline{G}$ die abgeschlossene Hülle, das heißt die Menge der Punkte von G zusammen mit ihren Häufungspunkten. Dann sind G, $\overline{G}$ nirgends dicht. Dennoch gilt, wie Volterra zeigt: Die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \overline{G}\ , \\ 1, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \overline{G}\ , \end{cases}$$

ist punktirt unstetig, aber sie genügt nicht Riemanns Integrabilitätskriterium I_2. Zum Beweis des Satzes beweist Volterra das Lemma:

Die Summe der Intervalle, die nur Punkte aus $\overline{G}$ enthalten, ist größer als zwei Drittel. [In moderner Symbolik: $c_e(\overline{G}) > 2/3 > 0, c_e$ äußerer Inhalt.]

Sei nämlich s_n die Gesamtlänge jener Intervalle, die $[0,1] \setminus \overline{G}$ bilden und deren Länge $\geq 1/2^{2n}$, so gilt wegen der Konstruktionsvorschriften

$$s_1 = 1 - \alpha_1' = \frac{1}{2^2} < \frac{1}{3},$$

$$s_2 < (1 - \alpha_1') + \sum (\alpha_n' - \alpha_{n,1}'') < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} < \frac{1}{3}, \text{ usf.},$$

$$s_n < \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}} < \frac{1}{3}.$$

Wenn also P die Partition von $[0,1]$ ist, deren Norm $< 1/2^{2n}$, so ist die Gesamtlänge dieser Unterintervalle, die keinen Punkt aus $\overline{G}$ enthalten, die also $[0,1] \setminus \overline{G}$ bilden, kleiner als 1/3. Hieraus folgt die Behauptung.

Die Konstruktion stimmt in wesentlichen Zügen mit der Konstruktion nirgends dichter Mengen des englichen Mathematikers H. J. S. Smith aus dem Jahre 1875 überein [Smith 1875]. Im gleichen Jar 1881 gelang es Volterra, unter Rückgriff auf diese Mengen G, $\overline{G}$ eine beschränkte, nicht Riemann-integrierbare Ableitung anzugeben [Volterra 1881b]. Die Existenz solcher Funktionen hatte Dini, wie Volterra erwähnt, vermutet. Das Beispiel wurde von Lebesgue in seiner Dissertation wieder aufgenommen [Lebesgue 1902, 263-265].

Die Mengen vom Inhalt Null, wie wir heute sagen würden, führten drei Jahre später zur Ausformulierung der ersten Inhaltstheorien, unter anderem von Otto Stolz, Cantor und Harnack [Stolz 1884; Cantor 1884; Harnack 1885]. Harnack definierte nicht explizit den Inhalt von Punktmengen, sondern gab eine Konstruktionsvorschrift an, wie der Inhalt im Falle einer im Intervall von der Länge L gegebenen Menge bzw. innerhalb begrenzter, ebener Mannigfaltigkeiten höherer Dimension bestimmt werden kann. Im ersten Fall wird es zum Beispiel der Limes der Summe der Längen einer endlichen Intervallüberdeckung.

Er untersuchte auch, was geschieht, wenn unendlich viele überdeckende Intervalle zugelassen werden. Dies führte ihn darauf, daß die Punkte einer abzählbaren Menge in Intervalle eingeschlossen werden können, deren Längensumme beliebig klein ist, eine Eigenschaft, die später Borel auf die Nützlichkeit seiner Maßtheorie führte. Damals erschien jedoch die Tatsache, daß eine überall dichte Menge wie Q in Intervalle von beliebig kleiner Gesamtlänge eingeschlossen werden kann, zu paradox, um als Grundlage einer Maßtheorie dienen zu können [Hawkins 1970, 64]. Man hatte zwar den Glauben abgelegt, daß topologisch zu vernachlässigende Mengen (nirgends dichte) in einem maßtheoretischen Sinn auch zu vernachlässigen sind. Aber es blieb das Gefühl, daß topologisch große (überall dichte) Mengen kein zu vernachlässigendes Maß haben sollten. Daher war für Harnack die Forderung entscheidend, daß es bei der Inhaltsdefinition um eine endliche Intervallüberdeckung geht.

Die von Volterra gefundenen Ergebnisse veranlaßten jedoch die Mathematiker nicht, Riemanns Definition für zu restriktiv zu halten. Im Gegenteil, man hielt sie für die allgemeinst mögliche, wie das anfangs erwähnte Weierstraßzitat belegt. Weierstraß hielt sie jedoch für unzulänglich und glaubte, sie mit Hilfe des Cantorschen Inhaltsbegriffes verallgemeinern zu können. Voraussetzung von der betreffenden Funktion f sollte nur sein, daß sie beschränkt und in einem Intervall definiert ist. Dagegen sollten selbst überabzählbar viele Unstetigkeitspunkte zugelassen werden.

Genauer spricht sich Weierstraß in zwei Briefen aus dem Jahre 1885 an du Bois-Reymond aus [Mittag-Leffler 1923b], mit dem er über Dirichlets zweites Integrabilitätskriterium korrespondierte. Die Unzulänglichkeit der Riemannschen Definition sah er in folgendem Umstand: Bei der Bestimmung der größten Schwankung einer Funktion in einem Intervall, das heißt bei der Aufstellung der Integrabilitätsbedingung, werden die Werte an den Unstetigkeitsstellen mitberücksichtigt, während der Integralwert, falls er existiert, allein von den Werten in den Stetigkeitspunkten abhängt. Da nach dem von Hankel entdeckten Satz die Stetigkeitspunkte einer integrierbaren Funktion eine dichte Menge bilden müssen [Hankel 1870/1882, 90] können in jeder Partition von $[a,b]$ die t_i der Summe

$$S = \sum f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

als Stetigkeitspunkte der Funktion f gewählt werden. Er schlägt daher vor, I_1 durch die Vorschrift zu modifizieren, daß anstelle der D_i die Schwankungen D_i^*, oder wie Weierstraß genauer als Riemann sagt, die Differenzen zwischen oberer und unterer Grenze der Werte von $f(x)$ in den Stetigkeitspunkten des i-ten Teilintervalls zu nehmen sind. Da die $D_i{}^*$ kleiner als die D_i sein können, kann f nach der modifizierten Riemannschen Definition integrierbar sein, auch wenn sie es nach dem ursprünglichen Kriterium nicht war.

Auf du Bois-Reymonds Einwand hin, auch die Modifikation der Riemannschen Definition reiche nicht aus, die Integrierbarkeit einer Funktion festzustellen, reagiert Weierstraß mit der Bemerkung, dann müsse sie eben noch mehr modifiziert, noch mehr von Unwesentlichem befreit werden. Ihm schwebe eine Definition vor, bei der das "Reich der integrierbaren Funktionen" mit dem Reich derjenigen Funktionen zusammenfällt, die in jedem noch so kleinen Intervall Stetigkeitspunkte besitzen. Er habe sich weniger als du Bois-Reymond gescheut, auf der Fährte weiterzugehen, da sein Glaube an die Angemessenheit der Riemannschen Definition bereits wankend geworden sei.

In einer seiner letzten Vorlesungen vom Sommersemester 1886 schlug er eine andere Definition vor, die die Klasse der integrierbaren Funktionen mit der Klasse der im Hankelschen Sinne punktirt unstetigen Funktionen gleich groß macht [Mittag-Leffler 1923b, 225 Anm. 16]. Er hebt hervor, daß dabei die wesentlichen Eigenschaften des Integrals bestehen bleiben. Ein durchaus moderner Gedanke! Die Frage war nur, was diese wesentlichen Eigenschaften seien. Da sein Integral ein oberes Integral war, hatte es nicht die Eigenschaft der Additivität. Jedoch war sein Denkansatz, wesentliche Eigenschaften eines zu definierenden Begriffes an den Anfang zu stellen, eien Kernfrage für Borel und Lebesgue und ermöglichte (aus moderner Sicht) einen axiomatischen Zugang. Ein solches Denken war den Analytikern dieser Zeit jedoch fremd.

Für du Bois-Reymond ging es unter anderem darum, ob für die gliedweise Integration die Voraussetzung der gleichmäßige Konvergenz durch die gleichmäßige Beschränktheit ersetzt werden kann, worüber er mit Leopold Kronecker (1823-1891) korrespondierte. Aus dieser Korrespondenz, über die Kronecker in seinem Nachruf auf du Bois-Reymond berichtet [Kronecker 1889], geht hervor, mit welchen Schwierigkeiten, ja welcher Verzweiflung du Bois-Reymond rang, als er die Konvergenz und Divergenz der Fourierschen Darstellungsformeln untersuchte. Kronecker sagt dort, die dunklen Fragen, die ihrer Natur nach wohl nicht eigentlich abgeschlossen werden könnten, hätten du Bois-Reymond noch lange beschäftigt.

Daß aber du Bois-Reymond, der ursprünglich partielle Differentialgleichungen erforschte, davon loskommen wollte, bezeugt ein Brief an Kronecker vom 22.4.1886. Darin heißt es, er werde noch eine Kroneckersche Bemerkung näher diskutieren, dann aber dieser Art Mathematik den Rücken kehren:

> *Es stehen die Ergebnisse in zu ungünstigem Verhältnis zur Anstrengung und außerdem regen sie nicht zu weiterem Forschen an, im Gegenteil, ihre Hauptwirkung ist, der Forschung in einer gewissen Richtung Einhalt zu tun, und das heißt, sehr brav gegen seinen Nächsten, aber zu uneigennützig gegen sich selbst handeln.*
> [Kronecker 1889, 353]

6. BORELS MAßTHEORIE

Der von Stolz, Cantor und Harnack eingeführte Inhaltsbegriff war, in späterer Terminologie, ein äußerer Inhalt. Er hatte für die meisten Mathematiker, abgesehen von Weierstraß, keine Verbindung mit dem bestimmten Integral. Von einer Punktmenge, die durch den Graphen einer Funktion beschränkt war, nahm man an, daß sie einen äußeren Inhalt hat, unabhängig von der Integrierbarkeit der Funktion. Erst der von Guiseppe Peano (1858-1932) und Jordan aus verschiedenen Gründen eingeführte Meßbarkeitsbegriff ermöglichte eine Neuformulierung des Riemannschen Integrals und der Integrabilität innerhalb eines maßtheoretischen Kontextes.

Dennoch beruht die moderne Integrationstheorie auf einem anderen Maßbegriff, nach dem eine beschränkte Funktion genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn ihre Unstetigkeitspunkte eine Menge vom Lebesgue-Maß Null bilden. Es ist der Maßbegriff Emile Borels, den dieser im Rahmen seiner Forschungen zur komplexen Funktionentheorie entwickelte. Er war nicht als eine Verallgemeinerung der Inhaltstheorie gemeint. Demgemäß nahm Borel einen sehr abweichenden Standpunkt ein, so abweichenden, daß dieser zunächst bei zeitgenössischen Mathematikern auf Ablehnung stieß [Schoenflies 1899, 181 Anm. 1]:

1. Borel fügte nicht die Häufungspunkte einer Menge *M* dieser hinzu.
2. Er sah von der Forderung ab, daß es eine endliche Menge von Gebieten gibt, die alle Punkte einer Menge *M* enthalten.

Auch methodisch beschritt er völlig neue Wege, worin er sich ausdrücklich an das Vorgehen seines Freundes Jules Drach anschloß [Borel 1898, 48 Anm. 1]. Drach hatte eine abstrakte und postulierende Methode der Konstruktion der höheren Algebra verwandt. Diese Methode war für den axiomatischen Zugang zur Maß- und Integrationstheorie entscheidend. Er lenkte die Aufmerksamkeit darauf, welche Eigenschaften eine gangbare Definition von Maß und Integral haben sollten.

Demgemäß bekennt Borel in den *Leçons sur la théorie des fonctions*, die 1898 in erster Auflage erschienen, er schließe eine Definition des Maßes anderer Mengen nicht aus. Aber sie erscheine ihm nutzlos, ja sie könnte hinderlich sein ["*elle pourrait même nous gêner*"], wenn sie dem Maß nicht die von ihm erteilten fundamentalen Eigenschaften verleihe (ganz ähnlich argumentiert vier Jahre später Lebesgue zugunsten seines Integralbegriffes (Lebesgue 1902, 282]):

1. Das Maß der Summe einer abzählbaren Unendlichkeit von Mengen ist gleich der Summe ihrer Maße (modern: σ - Additivität).
2. Das Maß der Differenz zweier Mengen ist gleich der Differenz ihrer Maße.
3. Das Maß ist nie negativ.
4. Jede Menge, deren Maß nicht Null ist, ist nicht abzählbar [Borel 1898, 48].

Vor allem diese letzte Eigenschaft habe er benutzt.

Borel hatte es in den *Leçons* auf eine Anwendung der Mengenlehre auf die Funktionentheorie abgesehen. Im Vorwort bemerkt er, sein Werk sei der Mengenlehre gewidmet. Er habe ihm aber den Titel Vorlesungen über die Funktionentheorie gegeben, da er, von Mengen sprechend, nie die Anwendungen außer acht gelassen habe. Tatsächlich trägt die vierte Auflage aus dem Jahre 1950 den Untertitel *Principes de la théorie des ensembles en vue des applications à la théorie des fonctions*.

Aber nirgends schlug er eine Verbindung zwischen seinem Maßbegriff und der Integrationstheorie vor. Dies spielte im Prioritätsstreit zwischen ihm und Legesgue im Jahre 1918 eine wichtige Rolle [8]. Den Lebesgue konnte damals zu seinen Gunsten auf drei Punkte verweisen:

1. Borel zeigte nicht die Widerspruchsfreiheit der Definition.
2. Er bestimmte nicht den Umfang der "meßbaren" Mengen.
3. Er ging nicht auf Anwendungen ein.

Borel definierte folgendermaßen (alle Mengen sind Untermengen von [0,1]):

> Sei M eine Menge aus allen Punkten, die in abzählbar vielen Intervallen enthalten sind, die sich nicht überlappen und die Gesamtlänge s haben. Dann hat M das Maß s.

Aus seiner Definition zog er sofort eine Reihe von Folgerungen:

1. Sind M, N disjunkt, s das Maß von M, s' das Maß von N, so ist das Maß von $(M \cup N) = s + s'$.
2. Abzählbar viele Mengen M_i seien paarweise disjunkt mit den Maßen s_i. Dann hat $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ das Maß $s_1 + s_2 + \cdots + s_n + \cdots$.
3. Es gelte $E' \subset E$, s' sei das Maß von E', s das Maß von E. Dann ist das Maß von $(E \setminus E') = s - s'$.

Mengen, deren Maß mittels der Definition und der dritten Folgerung definiert werden kann, heißen meßbar. Borel klärte nicht die allgemeine Beschaffenheit solcher Mengen. Aber er hielt fest, daß abgeschlossene Mengen meßbar sind [Hawkins 1970, 104].

Als Arthur Schoenflies 1900 seinen Bericht über den Stand der Punktmengenlehre vorlegte, den er im Auftrage der Deutschen Mathematiker-Vereinigung angefertigt hatte, sparte er nicht mit Kritik an Borels Maßtheorie. Denn Borels Definition war in den meisten zeitgenössischen Anwendungen der Inhaltstheorie nutzlos, der Inhaltstheorie, die aus der Riemannschen Integrationstheorie entwickelt war und ihr Hauptanwendungsgebiet blieb. Da Borels Theorie die Häufungspunkte ignorierte, machte sie überall dichte Mengen ausdehnungslos, für Schoenflies ein Ärgernis.

7. LEBESGUES INTEGRALBEGRIFF

Lebesgue war nur wenige Jahre jünger als Borel und Baire. Borels *Leçons* und Baires Dissertation waren gerade erschienen, als er kleinere Aufsätze zu publizieren begann, die die Grundlage seiner berühmten Dissertation wurden. Im fünften Aufsatz aus dem Jahre 1901 kündigte er erstmalig seinen neuen Integralbegriff an [Lebesgue 1901]. Seine Forschungsergebnisse publizierte er nur zögernd, wobei er nach eigenem Verständnis im Anschluß an Drach und Borel einen "deskriptiven," nicht axiomatischen Standpunkt einnahm [9]. Den Unterschied erläuterte er

1928 in der 2. Auflage der *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives* [Lebesgue 1928, 107 Anm. 1]. Solche deskriptiven Definitionen werden im Laufe der Entwicklung einer Theorie gestellt. Sie bilden kein vollständiges Ganzes wie axiomatische Definitionen und behaupten nicht, alle Axiome aufzuzählen, auf die sie sich stützen. Sie dürfen nicht von der Darstellung des Restes der Theorie getrennt werden. Tatsächlich verwendet Lebesgue für das Integral 1902 andere als 1904.

Über seine Motive und Absichten spricht er im Vorwort der Dissertation. Zwei seien besonders genannt:

1. Wenn man wie Jordan die Riemannsche Definition des Integrals akzeptiert, so gestattet sie nicht in allen Fällen, das Fundamentalproblem der Integralrechnung zu lösen: eine Funktion zu einer gegebenen Ableitung zu finden. Es ist daher natürlich, eine erweiterte Definition des Integrals zu suchen, so daß die Integration die inverse Operation der Ableitung ist.
2. Es gibt Schwierigkeiten, die Fläche einer Oberfläche ohne ebene Tangenten zu bestimmen, die auf stetige Weise variiert.

Da er das Integral einer stetigen Funktion als Fläche eines ebenen Gebietes definieren will und das Integral einer unstetigen, beschränkten Funktion als Maß einer bestimmten Punktmenge, widmet er das erste Kapitel dem Maß von Mengen. Sein erstes Problem ist, ein nichtnegatives Maß $m(E)$von beschränkten Mengen E durch wesentliche Eigenschaften zu bestimmen, das heißt so, daß gilt [10]:

1. Es gibt Mengen E mit $m(E) \neq 0$.
2. Gleiche Mengen haben gleiche Maße.
3. Seien E_i paarweise disjunkt. Dann gilt

$$m\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} m(E_n).$$

Lebesgue nennt zwei Mengen gleich, falls sie dadurch zum Zusammenfall gebracht werden können, daß eine von beiden ihren Ort ändert ["*en déplaçant*"], wenn es also eine Kongruenzabbildung zwischen beiden Mengen gibt. Diese Gleichheitsdefinition geht auf das siebte Axiom des ersten Buches der Elemente Euklids zurück: καὶ τὰ ἐψαρμόζοντα ἐπ ᾽αλληλα ᾽ισα ἀλλήλοι ἐστιν [Was einander kongruent ist, ist einander gleich].

Hawkins gibt die zweite Forderung unter Verwendung der Komplexaddition in der Form $m(E + a) = m(E)$, für jede reelle Zahl a, wieder, womit er freilich nur die Verschiebungen, nicht die Drehungen erfaßt [Hawkins 1970, 122]. Pesin spricht im Anschluß an die *Leçons* interpretierend von "kongruenten Mengen" [11]. Lebesgue selbst hat die zugrunde liegende Schwierigkeit, auf die nochmals zurückzukommen ist, nicht übersehen.

Wenn das Maßproblem lösbar sein soll, so muß $m(p) = 0$, p = Punkt, gelten, da eine beschränkte Menge unendlich vieler Punkte ein endliches Maß haben muß. Eine solche Menge ["Segment MN"] hat nicht das Maß Null, es sei denn, alle beschränkten Mengen hätten das Maß Null.

Lebesgue verallgemeinert nun die Definition des äußeren Inhalts mittels Borels Ideen zum äußeren Maß. Man nehme ein beliebiges MN, etwa [0,1] als Einheit. Jedem Segment PQ kann man eine Zahl, nämlich seine Länge $L(PQ)$ zuordnen, die zugleich das Maß der Punktmenge PQ ist. Sind I_n nichtüberlappende Intervalle, so gilt:

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} L(I_n).$$

Kann man demnach $m(E)$ definieren, so muß im Falle $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ gelten:

$$m(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} L(I_n).$$

Damit ergibt sich die folgende Definition:

> Das äußere Maß $m_e(E)$ einer Menge E ist die größte untere Schranke dieser Zahlen
>
> $$\sum_{n=1}^{\infty} L(I_n), \quad \text{falls } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n .$$

Demnach gilt: Ist $m(E)$ definierbar, so ist $m(E) \leq m_e(E)$.

Die Definition des inneren Maßes $m_i(E)$ ist eine Verallgemeinerung Jordanscher Ideen. Eine Jordan-meßbare Menge E hat wegen der endlichen Additivität von c_e, dam äußeren Inhalt, auf meßbaren Mengen die Eigenschaft: $c_e(E) + c_e([a,b] \setminus E) = b - a$, $E \subset [a,b]$.

Daher betrachtet Lebesgue die Klasse der beschränkten Teilmengen E mit $E \subset [a,b]$, so daß gilt:

$$(\S) m_e(E) + m_e([a,b] \setminus E) = b - a.$$

Er definiert: $m_i(E) = b - a - m_e([a,b] \setminus E)$.

Lebesgue sagt daraufhin beweislos, zwei "gleiche" Mengen hätten gleiche innere und äußere Maße. Aus seiner Definition folgt, daß (§) genau dann gilt, wenn $m_i(E) = m_e(E)$. Demnach nennt er Mengen meßbar, wenn diese Gleichheit vorliegt. Seine meßbaren Mengen stellen eine umfangreiche Klasse von Mengen dar, für die das Maßproblem, wie er es stellte, eine eindeutige Lösung hat. Allerdings führte er nicht explizit den Nachweis, daß sein Maß die zweite Maßbedingung erfüllt.

1904 ist er genauer und gibt zu [Lebesgue 1904, 103], daß es zwar zwei Arten gleicher Mengen gibt (durch Verschiebungen und durch Drehungen), daß aber seine Bedingung nur auf Verschiebungsgleichheit zutrifft. Er habe dies nicht angemerkt, da man sich in den folgenden Überlegungen auf Verschiebungen beschränken kann. Tatsächlich müßte man dazu zeigen, daß sich das Maß einer offenen Menge O statt durch das Maß von Intervallen auch durch das Maß von Kugeln erklären läßt, die O überdecken [Kamke 1960, 80].

Das zweite Kapitel seiner Dissertation enthält die Anwendung seiner Maßtheorie auf die Integrationstheorie. Sein erster Schritt ist, eine analytische Definition des erweiterten Integrals zu erhalten, das, wie er am Ende des Kapitels ausführt [Lebesgue 1902, 281], bestimmten Bedingungen genügen muß, nämlich unter anderem den folgenden:

(1) $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$.

(2) $\int f + \phi = \int f + \int \phi$.

(3) Die Definition muß Riemanns Definition als Spezialfall enthalten.

(4) Es darf keine wesentliche Differenz zwischen dem Fall einer und dem mehrerer Variablen geben.

(5) Die Definition soll das Fundamentalproblem des Integralkalküls lösen: eine Funktion finden, deren Ableitung bekannt ist.

1904 wählt Lebesgue sechs Bedingungen, die nur teilweise mit den fünf erwähnten übereinstimmen [Lebesgue 1904, 98 f.]. Er geht in den *Leçons* vom Integrationsproblem aus und kommt zum Maßproblem, womit er die systematische an die Stelle der genetischen Reihenfolge setzt:

(1) $\int_a^b f(x)dx = \int_{a+h}^{b+h} f(x-h)dx$ für beliebige a, b, h.

(2) $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0$ für beliebige a, b, c.

(3) $\int_a^b [f(x) + \phi(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b \phi(x)dx$.

(4) Ist $f \geq 0$ und $b > a$, so gilt $\int_a^b f(x)dx \geq 0$.

(5) $\int_0^1 1\, dx = 1$.

(6) Streben die $f_n(x)$ bei wachsendem n gegen $f(x)$, so streben die Integrale der $f_n(x)$ gegen das Integral von $f(x)$.

Historisch gesehen ist es äußerst wichtig, daß Lebesgue nun eine Partition von $[m,M]$ (m,M sind die untere bzw. obere Grenze der $f(x)$ in $[a,b]$) vornahm, um die Natur der Mengen

$$e_i{}' = \{x/a_i < f(x) < a_{i+1}\}, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1$$

bzw.

$$e_i = \{x/f(x) = a_i\}, \quad i = 0, \ldots, n$$

zu bestimmen, in die das Integrationsintervall $[a,b]$ dadurch unterteilt wird [12]. Dieser Zugang erforderte die Einführung des Begriffs "meßbare Funktion." Es waren die Eigenschaften meßbarer Funktionen und die Struktur der $e_i{}'$, e_i, die Lebesgues Denken leiteten und zu seinen wesentlichen Ergebnissen führten [13]. Er definierte:

> Ist für eine beschränkte oder unbeschränkte Funktion f $\{x/c < f(x) < d\}$ für alle c, d meßbar, so heißt f meßbar. Ist f definiert, beschränkt und meßbar auf $[a,b]$, so heißt f summierbar und das Integral von f, $\int_a^b f(x)dx$, ist der gemeinsame Grenzwert der Größen

$$\sigma = \sum_0^n a_i m(e_i) + \sum_1^n a_i m(e_i') \quad \text{und} \quad \sum = \sum_0^n a_i m(e_i) + \sum_1^n a_{i+1} m(e_i').$$

> Dabei gilt für e_i: $i = 0, 1, \ldots, n$, für $e_i{}'$: $i = 0, 1, \ldots, n-1$.

Tatsächlich bekennt Lebesgue im Vorwort [Lebesgue 1902, 232], er kenne keine Funktion, die nicht summierbar ist, er wisse nicht, ob es solche gebe. Dies lag daran, daß er keine nichtmeßbare Menge konstruieren konnte, wie es später mit Hilfe des Auswahlaxioms gelang. Am Ende des Integrationskapitels äußert er, daß seine Definition die genannten fünf Bedingungen erfüllt, wenn f beschränkt ist. Aber die Bedingungen reichten nicht, um das Integral einer beschränkten Funktion zu definieren. Er habe nicht zeigen können, daß die vorgeschlagene Definition die einzige ist, die die gestellten Bedingungen erfüllt, aber er habe versucht zu zeigen, daß sie

1. natürlich ist,
2. vom geometrischen Standpunkt beinahe notwendig erscheint,
3. nützlich ist. Sie erlaubt, das Fundamentalproblem des Integralkalküls zu lösen, wo die abgeleitete Funktion beschränkt ist.

Hier [Lebesgue 1902, 270] nimmt er auch zum Verhältnis seiner Integrationstheorie zu Riemanns Stellung. Während seine Definition im Falle beschränkter Funktionen eine Verallgemeinerung der klassischen Definition ist, gilt dies im Falle unbeschränkter Funktionen nicht. In dem Falle sei seine Definition keine Verallgemeinerung, sondern anders. Es wäre jedoch leicht, den Integralbegriff so zu verallgemeinern, daß die klassische Definition und seine Spezialfälle einer allgemeineren Definition sind. Auf diese tatsächlich eingetretene Entwicklung ist jedoch im Rahmen dieses Aufsatzes nicht mehr einzugehen.

DANKSAGUNG

Dieser Arbeit liegen Vorträge zugrunde, die an der Freien Universität Berlin, der Technischen Universität München und den Universitäten von Mainz und Utrecht gehalten wurden. Ich verdanke den Diskussionen mit meinen Hörern wertvolle Anregungen.

ANMERKUNGEN

1. Sion [1982] macht einen völlig unselbständigen Eindruck und beruht offensichtlich nicht auf eigenen Quellenstudien. Nach Fertigstellung dieser Studie wurde ich bekannt mit Mawhin [1983].

2. Pesin [1966, 49, 53] verweist auf Lebesgue [1901] statt auf Lebesgue [1904].

3. [Dirichlet 1829]; Dirichlets Auseinandersetzung mit Cauchys Arbeit ist analysiert in Grattan-Guinness [1970, 95 ff.].

4. "Calculations and operations in analysis do not lead to non-measurable sets and in practice there is no danger of encountering such a set" [Hartman & Mikusinski 1961, 32].

5. Diese Tatsache scheint mir wesentlich zu sein, da heute Riemann-Integrale auch ohne diese Voraussetzung eingeführt werden.

6. Nach den Worten von Hawkins [1970, 17] muß man dies annehmen, da er S. 202 entsprechend die Oszillation einer Funktion definiert und S. 17 diesen Begriff verwendet. Siehe dagegen Grattan-Guinness [1970, 126].

7. Abels Arbeit ist analysiert in Grattan-Guinness [1970, 80-85]. Die wortreiche Polemik Spalts [1981, Abschnitt I,2] gegen die Darstellungen von Bourbaki [1971, 239f.] und Kline [1972, 963-966] scheint mir überzogen zu sein, zumal keiner der beiden Autoren behauptet, daß Abel die gleichmäßige Konvergenz entdeckt hat.

8. [Lebesgue 1918]; Lebesgue bemerkt, daß Borel nicht zeigte, daß seine Definition widerspruchsfrei ist, daß er sich darauf beschränkte, dies zu behaupten. Das Gegenteil erklärt freilich Schoenflies [1899, 93].

9. [Lebesgue 1902, 281]; Hawkins [1970, 121] spricht vom "postulational approach."

10. [Lebesgue 1902, 236]. Lebesgue stellt die zweite Forderung auch als eine der beiden Hauptforderungen im Falle von Gebieten [Lebesgue 1902, 246].

11. [Pesin 1966, 53]; Bourbaki [1971, 260] sagt dazu aus moderner Sicht, die hauptsächlichen Bemühungen der Analytiker von Cavalieri bis Lebesgue hätten dem Problem gegolten, den Definitionsbereich der additiven, gegenüber kongruenten Abbildungen invarianten Mengenfunktionen zu erweitern.

12. Eine besonders klare Darstellung des Vorgehens gibt Lebesgue [1926 b].

13. Von dieser Tatsache bleibt die Möglichkeit unberührt, heute Lebesgue-Integrale mit Hilfe des Daniellschen Ansatzes einzuführen, wie etwa Gundlach [1973]. P. J. Daniell hatte 1918 eine Integrationstheorie entwickelt, die unabhängig von der Natur der Elemente war, seien es nun Punkte in Räumen abzählbarer Dimension, Kurven oder Ereignisklassen [Daniell 1917/1918].

BIBLIOGRAPHIE

Baire, R.-L. 1899. Sur les fonctions de variables réelles. *Annali di Matematica pura ed applicata* (3) 3, 1-122.

Bois-Reymond, P. du, 1875. Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen reeller Argumente nach ihren Aenderungen in den kleinsten Intervallen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 79, 21-37.

Borel, É. 1898. *Leçons sur la théorie des fonctions*. Paris: Gauthier-Villars (zahlreiche Neuauflagen).

Bourbaki, N. 1971. *Elemente der Mathematikgeschichte*. Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

Cantor, G. 1884. Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten, Nr. 6. *Mathematische Annalen* 23, 453-488. Der Aufsatz ist wiederabgedruckt in [Cantor 1932, 210-246]. Alle Zitate beziehen sich auf den Erstdruck.

——— 1932. *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts, mit erläuternden Anmerkungen sowie mit Ergänzungen aus dem Briefwechsel Cantor-Dedekind*, hrsg. v. E. Zermelo, nebst einem Lebenslauf Cantors von A. Fraenkel. Berlin: Springer. Nachdruck ergänzt um eine Bibliographie weiterer Arbeiten des Autors Berlin/Heidelberg usw.: Springer, 1980.

Cauchy, A.-L. 1823. *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique, sur le calcul infinitésimal*, Tome Premier. Paris. Das Werk ist wiederabgedruckt in [Cauchy 1882 ff., Bd. II, 4]. Alle Zitate beziehen sich auf die Werkausgabe.

——— 1882ff. *Oeuvres complètes*, 2 Reihen. Paris: Gauthier-Villars.

Dalen, D. van, & Monna, A. F. 1972. *Sets and integration*. Groningen: Wolters-Noordhoff.

Daniell, P. J. 1917/1918. A general form of integral. *Annals of mathematics* (2) 19, 279-294.

Darboux, G. 1875. Mémoire sur les fonctions discontinues. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (2) 4, 57-112.

Dini, U. 1878. *Fondamenti per la teorica delle funczioni di variabili reali*. Pisa: Nistri.
——— 1892. *Grundlagen für eine Theorie der Functionen einer veränderlichen reellen Grösse*, deutsch bearbeitet von J. Lüroth und A. Schepp. Leipzig: Teubner.
Dirichlet, P. G. L. 1829. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre des limites donnees. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 4, 157-169. Der Aufsatz ist wiederabgedruckt in [Dirichlet 1889/1897, Bd. 1, 117-132]. Alle Zitate beziehen sich auf den Erstdruck.
——— 1889/1897. *Gesammelte Werke*, hrsg. v. L. Kronecker und L. Fuchs, 2 Bde. Berlin: G. Reimer.
Félix, L. 1974 (Hrsg.). *Message d'un mathématicien: Henri Lebesgue pour le centenaire de sa naissance*. Introductions et extraits choisis par L. Félix, préface par S. Mandelbrojt. Paris: Blanchard.
Grattan-Guinness, I. 1970. *The development of the foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann*. Cambridge, Mass./London: MIT Press.
——— 1980 (Hrsg.). *From the calculus to set theory 1630-1910*. London: Duckworth.
Gundlach, K.-B. 1973. *Infinitesimalrechnung*. Braunschweig: Vieweg.
Hallett, M. 1979. Towards a theory of mathematical research programmes. *British Journal for the Philosophy of Science* 30, 1-25, 135-159.
Hankel, H. 1870/1882. Untersuchungen über die unendlich oft oscillirenden und unstetigen Functionen. Postum veröffentlicht in *Mathematische Annalen* 20 (1882), 63-112.
Harnack, A. 1880. Ueber die trigonometrische Reihe und die Darstellung willkürlicher Functionen. *Mathematische Annalen* 17, 123-132.
——— 1885. Ueber den Inhalt von Punktmengen. *Mathematische Annalen* 25, 241-250.
Hartman, S., & Mikusinski, J. 1961. *The theory of Lebesgue measure and integration*. Enlarged edition, translated from Polish by L. F. Boron. Oxford/London/New York/Paris: Pergamon.
Hawkins, Th. 1970. *Lebesgue's theory of integration: Its origins and development*. Madison/Milwaukee usw.: Univ. of Wisconsin Press. Alle Zitate beziehen sich auf die 2. Auflage von 1975.
——— 1980. The origins of modern theories of integration. In [Grattan-Guinnes 1980, 149-180].
Heine, H. 1870. Über trigonometrische Reihen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 71, 353-365.
Hermite, Ch. 1905. *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*. Publiée par B. Baillaud et H. Bourget, avec une préface de Émile Picard. 2 Bde. Paris: Gauthier-Villars.
Kalio, B. 1966. A history of the definite integral. Master's thesis, University of British Columbia, Vancouver. Diese Schrift war mir nicht zugänglich.

Kamke, E. 1960. *Das Lebesgue-Stieltjes-Integral*. 2. Auflage Leipzig: Teubner
Kline, M. 1972. *Mathematical thought from ancient to modern times*. New York: Oxford Univ. Press.
Kronecker, L. 1889. Paul du Bois-Reymond. *Journal für die reine und angewandte Mathematik* 104, 352-354.
Lakatos, I. 1976. *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*, J. Worrall and E. Zahar, eds. Cambridge: Cambridge Univ. Press.
Lebesgue, H. 1901. Sur une généralisation de l'intégrale définie. *Comptes rendus hebdomadaires des Scéances de l'Académie des Sciences* 132 (17), 1025-1028. Der Aufsatz ist wiederabgedruckt in [Lebesgue 1972/1973, Bd. 1, 197-199]. Alle Zitate beziehen sich auf den Erstdruck.
——— 1902. Intégrale, longueur, aire. *Annali di Matematica pura ed applicata* (3) 7, 231-359. Die Arbeit ist wiederabgedruckt in [Lebesgue 1972/1973, Bd. 1, 203-331]. Alle Zitate beziehen sich auf den Erstdruck.
——— 1904. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris: Gauthier-Villars. Das Werk ist wiederabgedruckt in [Lebesgue 1972/1973, Bd. 2, 11-154]. Alle Zitate beziehen sich auf den Erstdruck.
——— 1918. Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* (3) 35, 191-250. Der Aufsatz ist wiederabgedruckt in [Lebesgue 1972/1973, Bd. 2, 291-350]. Alle Zitate beziehen sich auf den Erstdruck.
——— 1922. *Notice sur les travaux scientifiques de M. Henri Lebesgue*. Toulouse: Édouard Privat. Der Aufsatz ist wiederabgedruckt in [Lebesgue 1972/1973, Bd. 1, 97-175]. Alle Zitate beziehen sich auf den Erstdruck.
——— 1926a. Notice sur la vie et les travaux de Camille Jordan (1838-1922). *Mémoires de l'Académie des Sciences de l'Institut de France* (2) 58, XXXIX-LXVI.
——— 1926b. Sur le développement de la notion d'intégrale. *Matematisk Tidsskrift B*, 54-74. Der Aufsatz ist wiederabgedruckt in *Revue de métaphysique et de morale* 34 (1927), 149-167, und in [Lebesgue 1972/1973, Bd. 2, 354-374]. Eine spanische Übersetzung "Evolución de la noción de integral" ist enthalten in *Revista Matematica Hispano-Americana* (2) 2 (1927), 65-74, 97-106, eine englische Übersetzung "The development of the integral concept" ist enthalten in [Lebesgue 1966, 177-194]. Alle Zitate beziehen sich auf den Erstdruck.
——— 1928. *Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris: Gauthier-Villars. Dies ist die zweite, stark geänderte Auflage von Lebesgue [1904]. Alle Zitate beziehen sich auf den Nachdruck von 1950.

——— 1966. *Measure and the integral.* Edited with a biographical essay by K. O. May. San Francisco/London/Amsterdam: Holden-Day.

——— 1972/1973. *Oeuvres scientifiques,* 5 Bde. Geneva: Université, Institut de Mathématiques.

Mawhin, J. 1983. Présences des sommes de Riemann dans l'évolution du calcul intégral. Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques 4, 117-147.

Mittag-Leffler, G. 1923a. (Hrsg.). Weierstraß et Sonja Kowalewsky. *Acta Mathematica* 39, 133-198.

——— 1923b (Hrsg.). Briefe von K. Weierstraß an Paul du Bois-Reymond. *Acta Mathematica* 39, 199-225.

Monna, A. F. 1972. The integral from Riemann to Bourbaki. In [Dalen & Monna 1972, 75-154].

Pesin, I. 1966. *Razvitie ponjatija integrala.* Moscow: Nauka. Zitiert wird nach der englischen Übersetzung *Classical and modern integration theories*, S. Kotz, ed. New York/London: Academic Press, 1970.

Riemann, B. 1854/1868. Ueber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe. *Habilitationsschrift,* Göttingen. Postum veröffentlicht in *Abhandlungen der mathematischen Classe der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen* 13 (1868; von den Jahren 1866 und 1867), 87-132. Die Schrift ist wiederabgedruckt in [Riemann 1892/1902, 227-271]. Alle Zitate beziehen sich auf diese Werkausgabe.

——— 1892/1902. *Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlaß,* hrsg. unter Mitwirkung von R. Dedekind und H. Weber, 2. Auflage. Leipzig: Teubner, 1892; Nachträge, hrsg. von M. Noether und W. Wirtinger. Leipzig: Teubner, 1902. Diese Ausgabe wurde nachgedruckt in New York: Dover, 1953.

Riesz, F. 1949. L'évolution de la notion d'intégrale depuis Lebesgue. *Annales de l'Institut Fourier* 1 (Chartres 1950), 29-42.

Schoenflies, A. 1899. Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten, Bericht, erstattet der DMV. *Jahresberichte der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8 (erschienen 1900), 1-252.

Sion, M. 1982. A brief history of the integral to 1900. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics* 6, 61-73.

Smith, H. J. S. 1875. On the integration of discontinuous functions. *Proceedings of the London Mathematical Society* 6, 140-153.

Spalt, D. D. 1981. *Vom Mythos der mathematischen Vernunft, Eine Archäologie zum Grundlagenstreit der Analysis oder Dokumentation einer vergeblichen Suche nach der Einheit der mathematischen Vernunft.* Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.

Stolz, O. 1884. Ueber einen zu einer unendlichen Punktmenge gehörigen Grenzwerth. *Mathematische Annalen,* 23, 152-156.

Volterra, V. 1881a. Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue. *Giornale di Matematiche* 19, 76-87. Der Aufsatz ist wiederabgedruckt in [Volterra 1954/1960, Bd. 1, 7-15]. Alle Zitate beziehen sich auf den Erstdruck.

——— 1881b. Sui principii del calcolo integrale. *Giornale di Matematiche* 19, 333-372. Der Aufsatz ist wiederabgedruckt in [Volterra 1954/1960, Bd. 1, 16-48]. Alle Zitate beziehen sich auf den Erstdruck.

——— 1954/1960. *Opere matematiche, Memorie e Note*, 4 Bde. Rome: Accademia Nazionale dei Lincei.